31/3/2017

Πρόταση: Έστω $(G,\cdot)$ ομάδα και $H \subseteq G$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο της G. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Η H υποομάδα της G

(ii) $H \neq \emptyset$ και $\forall x,y \in H \Rightarrow x\cdot y \in H$.

Απόδειξη: (1) $\Rightarrow$ (2) (τετριμμένα)

(2) $\Rightarrow$ (1): Επειδή $H \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in G : a \in H$. Θεωρούμε τη απεικόνιση $\varphi_a : H \to H$, $\varphi_a(x) = a\cdot x$

Η απεικόνιση φ_a είναι καλά ορισμένη διότι το H είναι κλειστό στην πράξη $\cdot$ της G.

Έστω ότι, $\forall x,y \in H \Rightarrow \varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ Τότε $ax = ay$
$\Rightarrow x = y$, λόγω του νόμου διαγραφής στην G.
Άρα, φ 1-1.

(Γνωρίζουμε ότι αν X και Y πεπερασμένα με $|X| = |Y|$ τότε κάθε 1-1 απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ είναι και επί)

Άρα παραπάνω, αφού $\varphi_a : H \to H$ προφανώς $|H| = |H|$ και φ_a 1-1 άρα φ_a είναι επί. Επειδή $a \in H$ και φ_a επί

$\Rightarrow \exists x \in H : \varphi_a(x) = a \Rightarrow a\cdot x = a \Rightarrow x = e$

Επειδή $e \in H$ και φ_a επί, έπεται ότι $\exists y \in H : \varphi_a(y) = e \Rightarrow a\cdot y = e$
$\Rightarrow y = a^{-1}$

Άρα $a^{-1} \in H$. Αν $b \in H$, ένα τυχόν στοιχείο, τότε όπως πριν η απεικόνιση $\varphi_6 : H \to H$, $\varphi_6(x) = 6x$ είναι επί και τότε για το $e \in H$, υπάρχει $y \in H : \varphi_6(y) = e$

$\Rightarrow 6 \cdot y = e \Rightarrow y = 6^{-1} \in H$. Άρα από το (2) του Θεωρήματος έπεται ότι η H υποομάδα της G

Παρατήρηση: Αν το υποσύνολο H δεν είναι πεπερασμένο τότε το συμπέρασμα της Πρότασης δεν ισχύει, για παράδειγμα

$G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{N}, +)$. Τότε $|\mathbb{N}| = +\infty$, με $\mathbb{N} \neq \varnothing$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

και $\mathbb{N}$ κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης. Άρα ικανοποιείται η συνθήκη (ii), αλλά το $(\mathbb{N}, +)$ δεν είναι υποομάδα αφού δεν υπάρχει το αντίστροφο ενός στοιχείου

Συμβολισμός: Αν H: υποομάδα της ομάδας $(G, \cdot)$ θα γράφουμε $H \leq G$

Παράδειγμα: (1) Αν $(\mathbb{C}, +)$: προσθετική ομάδα των μιγαδικών Τότε $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$

(2) Αν $(\mathbb{C}^*, \cdot)$: Πολλαπλασιαστική ομάδα των μη-μηδενικών μιγαδικών

$(\{-1, 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$

(3) Έστω $(U,\cdot)$: η ομάδα του κύκλου όπου $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$\forall n \geq 1$ $(U_n,\cdot)$: η ομάδα των n-οστών ριζών της μονάδας

$U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Τότε $(U_n,\cdot) \leq (U,\cdot) \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$

(4) Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ τότε $(GL_n(\mathbb{K}),\cdot)$ η n-οστή γενική γραμμική

ομάδα των αντιστρέψιμων nxn πινάκων με στοιχεία από

το $\mathbb{K}$.

• Θεωρούμε το σύνολο $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid |A| = 1\} \subseteq GL_n(\mathbb{K})$

Τότε $SL_n(\mathbb{K}) \leq (GL_n(\mathbb{K}),\cdot)$

Αφού $SL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, αφού $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ και αν $A, B \in SL_n(\mathbb{K})$

$\Rightarrow |A| = |B| = 1$ και $|A \cdot B^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = 1 \cdot 1 = 1$

Η υποομάδα $SL_n(\mathbb{K})$ καλείται ως η n-οστή ειδική γραμμική ομάδα.

• Θεωρούμε το σύνολο $O_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \cdot {}^tA = I_n = {}^tA \cdot A\}$
$\subseteq GL_n(\mathbb{K})$

Τότε $O_n(\mathbb{K}) \leq (GL_n(\mathbb{K}),\cdot)$

• Θεωρούμε το σύνολο $SO_n(\mathbb{K}) = \{A \in O_n(\mathbb{K}) \mid |A| = 1\} \leq (GL_n(\mathbb{K}),\cdot)$

(5) Έστω το σύνολο πινάκων:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R})$$

Επειδή, προφανώς το G είναι κλειστό στην πράξη $GL_2(\mathbb{R})$ έπεται ότι $G \leq GL_2(\mathbb{R})$ και η

G ισόμορφη με την ομάδα του Klein

(6) Έστω το εξής σύνολο πινάκων μιγαδικών αριθμών

$$Q = \left\{ \underset{\pm I_2}{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\pm I}{\pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}, \underset{\pm J}{\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{\pm K}{\pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{C})$$

Τότε $I^2 = J^2 = K^2 = I_2^2 =$

Επιπλέον, ικανοποιούνται οι σχέσεις:

(i) $I \cdot J = K$ $\quad J \cdot I = -K$
$J \cdot K = I$ $\quad K \cdot J = -I$
$K \cdot I = J$ $\quad I \cdot K = -J$

Τότε εύκολα βλέπουμε ότι $Q \leq GL_2(\mathbb{C})$ διότι το Q με βάση τις προηγούμενες σχέσεις είναι κλειστό στην πράξη $GL_2(\mathbb{C})$

Η ομάδα Q καλείται ως η ομάδα των τετρανίων του Hamilton και είναι μια μη-αβελιανή ομάδα με τάξη 8.

(7) Στη συμμετρική ομάδα $(S_4, \circ)$ θεωρούμε το εξής υποσύνολο: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

Αφού G είναι κλειστό στην πράξη $\circ$ Άρα $G \leq S_4$. Επίσης G ισόμορφο της ομάδας του Klein

Παράδειγμα: Έστω $(G = \{e, a, b, c\}, \circ)$ η ομάδα του Klein

όπου $a^2 = b^2 = c^2 = e$, $a \cdot b = c$

$H_1 = \{e, a\}$, $H_2 = \{e, b\}$, $H_3 = \{e, c\}$ υποομάδες της G

Τότε $H_1 \cup H_2 = \{e, a, b\}$, δεν είναι υποομάδα της G αφού

$a \cdot b = c \notin H_1 \cup H_2$ άρα δεν είναι κλειστό στην πράξη.

Γενικά η ένωση υποομάδων μιας ομάδας, δεν είναι υποομάδα. Αυτό, το οποίο ισχύει είναι το εξής:

Αν $\left.\begin{array}{l} H_1 \leq G \\ H_2 \leq G \end{array}\right\} H_1 \cup H_2 \leq G$ αν-ν $H_1 \subseteq H_2$ ή $H_2 \subseteq H_1$

Scanned by CamScanner

Πρόταση: Έστω $\{H_i\}_{i\in I}$ μια συλλογή υποομάδων μιας ομάδας $(G,\circ)$. Τότε $\bigcap_{i\in I} H_i \leq (G,\circ)$

Απόδειξη: (1) $H_i \leq G,\ \forall i\in I \Rightarrow e\in H_i,\ \forall i\in I \Rightarrow e\in \bigcap_{i\in I} H_i$

(2) Έστω $\left.\begin{matrix} x,y\in \bigcap_{i\in I} H_i \Rightarrow x,y\in H_i,\ \forall i\in I \\ H_i\leq G \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\cdot y^{-1}\in H_i,\ \forall i\in I \Rightarrow x\cdot y\in \bigcap_{i\in I} H_i$

Άρα (1) & (2) $\bigcap_{i\in I} H_i \leq G$

Έστω $(G,\circ)$ και $X\subseteq G,\ X\neq \emptyset$. Τότε $\langle X\rangle = \bigcap \{H\leq G \mid X\subseteq H\}$

Προφανώς $G\in \{H\leq G\mid X\subseteq H\} \Rightarrow \{H\leq G\mid X\subseteq H\}\neq\emptyset$

τότε από Πρόταση $\langle X\rangle \leq G$ και προφανώς $X\subseteq \langle X\rangle$. Τότε η $\langle X\rangle$ είναι η μικρότερη υποομάδα της G η οποία περιέχει το X. Πράγματι, αν $K\leq G$ και $X\subseteq K$ θδο $\langle X\rangle \subseteq K$

Διότι $K\in\{H\leq G\mid X\subseteq K\} \Rightarrow \bigcap \{H\leq G\mid X\subseteq H\}\subseteq K$

και άρα $\langle X\rangle \subseteq K$

Παράδειγμα: Αν $X=\{a\}$, τότε $\langle X\rangle = \langle a\rangle = \{a^n \in G \mid n\in\mathbb{Z}\}$

Γενικά, για κάθε $X\subseteq G$, η υποομάδα $\langle X\rangle$ καλείται η υποομάδα της G η οποία παράγεται από το X και τα στοιχεία του X καλούνται γεννήτορες της $\langle X\rangle$

Αν $(G,\circ)$ είναι μια ομάδα, τότε το κέντρο της $(G,\circ)$ ορίζεται να είναι το υποσύνολο $Z(G)=\{x\in G \mid x\circ a = a\circ x \; \forall a\in G\}$

Ισχυρισμός: $Z(G)\leq (G,\circ)$ και η $Z(G)$ είναι αβελιανή. Επιπλέον

G: αβελιανή $\Leftrightarrow G=Z(G)$

- $Z(G)\neq \emptyset$, διότι $e\in Z(G)$

- αν $x,y\in Z(G)$ τότε $(x\circ y)\cdot a = x\cdot(y\cdot a) = x\cdot(a\cdot y) = (x\cdot a)\cdot y$

$$= (a\cdot x)\cdot y$$
$$= a\cdot(x\cdot y)$$

Άρα $(x\cdot y)\cdot a = a\cdot(x\cdot y)\; \forall a\in G$. Άρα, αν $x,y\in Z(G)$ $\Rightarrow x\cdot y\in Z(G)$

- $x\in Z(G) \Rightarrow x^{-1}\in Z(G)$

Scanned by CamScanner

Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Αν $|G|<+\infty$ τότε ορίζουμε την τάξη της ομάδας G να είναι $|G|$. Αν η G έχει άπειρο πλήθος στοιχείων τότε η τάξη της ορίζεται να είναι $|G|=+\infty$.

Έστω $a\in G$. Η τάξη του a ορίζεται να είναι

$o(a)=|\langle a\rangle|$: η τάξη της κυκλικής υποομάδας της G που παράγεται από το a.

Έστω $o(a)<+\infty$. Τότε $\langle a\rangle=\{a^n\in G \mid n\in\mathbb{Z}\}$ και επειδή $|\langle a\rangle|<+\infty \Rightarrow \exists\, i,j\in\mathbb{Z} : i\neq j$ και $a^i=a^j$. Χωρίς βλάβη υποθέτουμε ότι $i>j$. Τότε $a^i=a^j \Rightarrow a^i\cdot a^{-j}=a^j\cdot a^{-j}$

$\Rightarrow a^{i-j}=e$ και επειδή $i-j\in\mathbb{N}$ τότε $\exists\, n\in\mathbb{N}$ με $a^n=e$

Αντίστροφα, έστω ότι: $\exists\, m\in\mathbb{N} : a^m=e$. Έστω, $n=\min\{m\in\mathbb{N} \mid a^m=e\}$. Τέτοιος θετικός ακέραιος n υπάρχει από την Αρχή Καλής Διάταξης στο σύνολο $\{m\in\mathbb{N} \mid a^m=e\}\neq\emptyset$

Ισχυρισμός: $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$

Προφανώς: $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \subseteq \langle a \rangle$

Έστω $x \in \langle a \rangle \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: x = a^k$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση

του k με το n, $k = n \cdot \lambda + r$, $0 \leq r < n$. Τότε $x = a^k = a^{n \cdot \lambda + r}$

$$= a^{n \cdot \lambda} \cdot a^r$$
$$= (a^n)^\lambda \cdot a^r$$
$$= e^\lambda \cdot a^r = a^r$$

Άρα, $x = a^k = a^r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Άρα $x \in \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$

Άρα, αν $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\} \Rightarrow o(a) = |\langle a \rangle| < +\infty$

Άρα, $o(a) < +\infty \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}: a^m = e$ και τότε $o(a) = \min\{m \in \mathbb{N}: a^m = e\}$

Βασική Ιδιότητα Τάξης Στοιχείου: Έστω $o(a) < +\infty$. Τότε

$\forall k \in \mathbb{N}: a^k = e \Leftrightarrow o(a) \mid k$

($\Leftarrow$) Αν $o(a) \mid k \Rightarrow k = o(a) \cdot \lambda$ τότε $a^k = a^{o(a) \cdot \lambda} = \left(a^{o(a)}\right)^\lambda = e$

($\Rightarrow$) Έστω ότι: $a^k = e$. Από την Ευκλείδεια διαίρεση

του k με την τάξη του a ($o(a)$) είναι

$k = o(a) \cdot \lambda + r$, $0 \leq r < o(a)$. Τότε $a^k = a^{o(a) \cdot \lambda + r}$

$$= \left(a^{o(a)}\right)^\lambda \cdot a^r \Rightarrow a^k = a^r \Rightarrow a^r = e \Rightarrow a^r = a^0$$
$$\Rightarrow r = 0.$$